07/11/2004

<u>מבוא למערכות ומעגלים חשמליים : פתרון תרגיל בית מספר 4</u>

1. א. נשתמש בעובדה ש: $\ln(S)=\int\limits_0^S \frac{1}{S'}\cdot dS'$, למדנו בכיתה שהתמרת לפלס של פונקצית מדרגה שווה ל- $\frac{1}{s}$ ולכן ההתמרה ההפוכה היא: $L^{-1}(\frac{1}{S})=\delta_{-1}(t)$, למדנו גם ש

$$\mathrm{L}\left\{\int_0^t f(t')dt'\right\}=\frac{1}{s}\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt=\frac{1}{s}F(s)$$

כלומר: אינטגרציה בזמן מותמרת לחילוק ב S במישור התדר המרוכב. באופן אקוויוולנטי אפשר להוכיח ש: $L^{-1}\{\int\limits_0^S F(S')dS'\}=\frac{-1}{t}f(t)$ באותה שיטת הוכחה בדיוק .שימו לב להכפלה במינוס אחד שלא קיימת במישור התדר !

ולכן אפשר לכתוב : $L^{-1}\{\ln(S)\}=L^{-1}\{\int\limits_0^S\frac{1}{S'}\cdot dS'\}=\frac{-1}{t}L^{-1}\{\frac{1}{S}\}=\frac{-1}{t}\delta_{-1}(t)$

ב. בסעיף הזה נשתמש בקשרים הטריגונומטריים : $\cos^2(\alpha)=\frac{1}{2}(1+\cos(2\alpha))$

וגם $\cos(\alpha)\cos(\beta)=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right)$,ולכן אפשר לכתוב :

$$\cos^3(2t)=\cos(2t)\cos^2(2t)=\cos(2t)\frac{1}{2}\left(1+\cos(4t)\right)=\frac{1}{2}\left(\cos(2t)+\cos(2t)\cos(4t)\right)=$$
$$\frac{1}{2}(\cos(2t)+\frac{1}{2}\cos(2t)+\frac{1}{2}\cos(6t)\quad)=\frac{3}{4}\cos(2t)+\frac{1}{4}\cos(6t)$$

כעת נשתמש בקשר : $L\{\cos(\omega t)\delta_{-1}(t)\}=\frac{S}{S^2+\omega^2}$ ונקבל:

$$L\{\cos^3(2t)\delta_{-1}(t)\}=\frac{3}{4}\frac{S}{S^2+4}+\frac{1}{4}\frac{S}{S^2+36}$$

2. הוכחה באינדוקציה: נבדוק קודם עבור n=0 $L\{t^0\}=L\{1\cdot\delta_{-1}(t)\}=\frac{1}{S}=\frac{0!}{S^{0+1}}$

כעת נניח שהטענה נכונה עבור n'=n : $L\{t^n\}=\frac{n!}{S^{n+1}}$

ונבדוק את נכונותה עבור n'=n+1: $L\{t^{n+1}\}=L\{t\cdot t^n\}=-\frac{d}{dS}L\{t^n\}=-\frac{d}{dS}\frac{n!}{S^{n+1}}$

כאשר נעזרנו במשפט הגזירה בתדר ובליניאריות של התמרת לפלאס (כדי להעביר את ה 1- מהזמן לתדר) . המשך:

$$-\frac{d}{dS}\frac{n!}{S^{n+1}}=-1\cdot n!\cdot(-(n+1))S^{-n-1-1}=\frac{n!(n+1)}{S^{n+2}}=\frac{(n+1)!}{S^{n+2}}$$

$$\Rightarrow L\{t^{n+1}\}=\frac{(n+1)!}{S^{n+2}}$$

מ.ש.ל

3. א. $y''+2\alpha y'+\omega_0^2 y=f(t)$ נפעיל את התמרת לפלס על שני צידי המשוואה:

$$L\{y''\}=S^2Y(S)-Sy(0)-y'(0)=S^2Y(S)$$
$$L\{2\alpha y'\}=2\alpha(SY(s)-y(0))=2\alpha SY(S)$$
$$L\{\omega_0^2 y\}=\omega_0^2 Y(s)$$
$$L\{f(t)\}=\frac{A\omega_0}{(S+a)^2+\omega_0^2}$$

ונקבל: $Y(s)\left(S^2+2\alpha S+\omega_0^2\right)=\frac{A\omega_0}{(S+a)^2+\omega_0^2}$ ולבסוף נחלץ את Y(S) :

$$Y(s)=\frac{A\omega_0^2}{\left(S^2+2\alpha S+\omega_0^2\right)\cdot\left((S+a)^2+\omega_0^2\right)}$$

ב. נשתמש במשפט הערך הסופי :

$$f(\infty)=\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{s\to 0}sF(s)$$

ולכן: $y(t\to\infty)=\lim_{S\to 0}SY(S)=\lim\frac{A\omega_0^2 S}{\left(S^2+2\alpha S+\omega_0^2\right)\cdot\left((S+a)^2+\omega_0^2\right)}=\frac{0}{\omega_0^2\left(\omega_0^2+a^2\right)}=0$

4. עבור הקבל,הקשר בין המתח לזרם הוא :

$$i(t)=C\frac{dv(t)}{dt}\Rightarrow I(S)=C\cdot(SV(s)-V_0)$$

נשתמש שוב ממשפט הערך הסופי :

$$i(\infty)=\lim_{S\to 0}SI(S)=\lim_{S\to 0}CS(SV(s)-V_0)=0$$

כלומר: לאחר זמן ארוך מאוד הזרם הוא אפס והקבל מהווה **נתק** .

עבור הסליל,נקבל את הקשר הבא:

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt} \Rightarrow V(S) = L(SI(s) - I_0)$$

נשתמש שוב ממשפט הערך הסופי :

$$\underline{v(\infty) = \lim_{S\to 0} SV(S) = \lim_{S\to 0} LS(SI(s) - I_0) = 0}$$

כלומר :לאחר זמן ארוך המתח על הסליל הוא אפס (והזרם שונה מאפס), ולכן הסליל מהווה קצר .

הערה: הטענות הללו נכונות בהנחה שהגבול של $v(t)\,\&\,i(t)_{t\to\infty}$ קיים .