

מבוא למערכות ומעגלים חשמליים : פתרון תרגיל בית מספר 10

1. א. נחשב, כרגיל, את האימפדנס הכולל של המעגל:

$$Z_1 = Z_{C1} \parallel Z_{R1} = \frac{\frac{R_1}{C_1 S}}{R_1 + \frac{1}{C_1 S}} = \frac{R_1}{1 + R_1 C_1 S}$$

$$Z_T = Z_1 + R = \frac{1}{CS} = \frac{RCS(1 + R_1 C_1 S) + R_1 CS + (1 + R_1 C_1 S)}{CS(1 + R_1 C_1 S)} =$$

$$\frac{RCS + R_1 R C_1 C S^2 + R_1 CS + R_1 C_1 S + 1}{CS(1 + R_1 C_1 S)}$$

$$I = \frac{V_{in}}{Z_T}, V_C = I \cdot \frac{1}{CS} \Rightarrow V_C = V_{in} \cdot \frac{CS(1 + R_1 C_1 S)}{RCS + R_1 R C_1 C S^2 + R_1 CS + R_1 C_1 S + 1} \cdot \frac{1}{CS} =$$

$$\frac{(1 + R_1 C_1 S)}{R_1 R C_1 C S^2 + S(R_1 C + R_1 C_1 + RC) + 1}$$

נציב את הערכים של הרכיבים ונקבל:

$$G(S) = \frac{S+1}{2CS^2 + S(3C+1) + 1}$$

קיבלנו אפס ב -1 עוד שני קטבים שהערך שלהם תלוי בקבל C :

$$S_{1,2} = \frac{-(3C+1) \pm \sqrt{9C^2 - 2C + 1}}{4C}$$

ב. נשתמש בקריטריון RL עבור החוג הסגור:
נבדוק קודם כל אם יש קטבים מרוכבים:

$$9C^2 - 2C + 1 > 0 \quad \forall \quad C \quad \underline{\text{ממשיים}}.$$

נבדוק אם יש קטבים חיוביים:
נחשב עבור השורש הגדול יותר -

$$\frac{-(3C+1) + \sqrt{9C^2 - 2C + 1}}{4C} < 0 \Rightarrow$$

$$-(3C+1) + \sqrt{9C^2 - 2C + 1} < 0 \Rightarrow \sqrt{9C^2 - 2C + 1} < (3C+1) \Rightarrow$$

$$9C^2 - 2C + 1 < 9C^2 + 1 + 6C \Rightarrow 0 < 8C \Rightarrow 0 < C$$

התנאי האחרון תמיד מתקיים, ולכן השורש הגדול קטן מאפס עבור כל ערך של C , וכמובן שגם השורש השני, עם הסימן השלילי לפני השורש, קטן מאפס.

המסקנה לגבי ה RL היא שכל הקטבים והאפסים של החוג הפתוח נמצאים על הציר הממשי ומשמאל לאפס, קוטב אחד ילך אל האפס ב-1 והקוטב השני ילך לאין סוף עם אסימפטוטה

בזווית : $\theta_i = \frac{\pi(2 \cdot 0 + 1)}{1} = \pi$ כלומר : שמאלה ובמקביל לציר הממשי .

נבדוק אם יש נקודות שבירה מהציר הממשי בעזרת כלל הנגזרת:

$$\frac{d}{dS} \left(\frac{1}{G(s)} \right) = \frac{d}{dS} \left(\frac{2CS^2 + S(3C+1) + 1}{S+1} \right) = \frac{C(2S^2 + 4S + 3)}{(S+1)^2} = 0$$

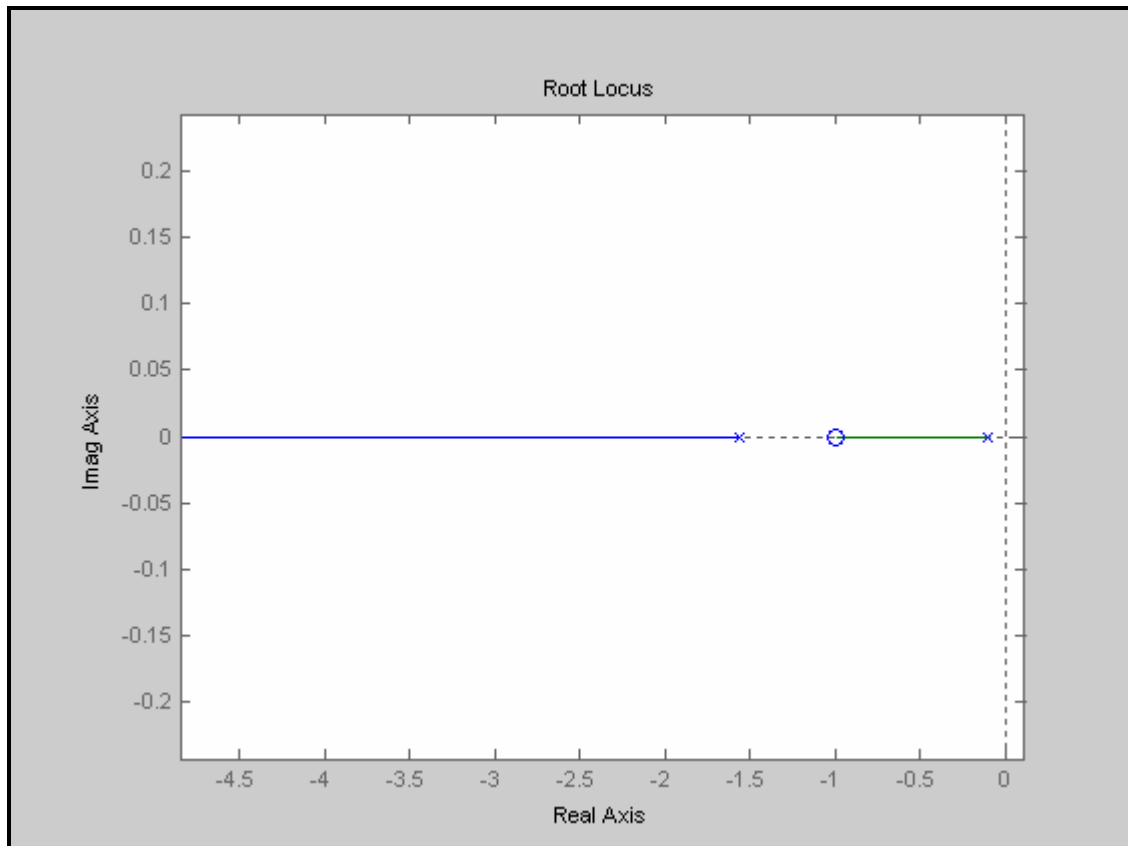
$$\Rightarrow (2S^2 + 4S + 3) = 0$$

למשוואה האחרונה אין פתרון ממשי ולכן הענפים לא עוזבים את הציר הממשי.

ולכן אף אחד משני הענפים לא יגיע לחצי הימני של המישור המרוכב, והמערכת היא יציבה עבור כל ערך של C שנבחר .

ג. לדוגמא: עבור $C = 3F$, נקבל פונקציית תמסורת בחוג הפתוח של:

$$G(S) = \frac{S+1}{6S^2 + 10S + 1}, \text{ זה } RL \text{ תיראה כך:}$$



כלומר: המערכת יציבה לכל K .

3. $G(S) = \frac{S+5}{S(S+10)^2}$, לתמסורת יש אפס ב -5 , קוטב באפס, וקוטב כפול ב -10.

ל RL יש 3 ענפים: 1 הולך לאפס ב -5, והשניים האחרים הולכים לאין סוף.

ה RL נמצא על הציר הממשי בין אפס למינוס חמש בלבד (היכן שיש מימינו קוטב אחד).

זוויות האסימפטוטות: ישנן 2 אסימפטוטות בזוויות:

$$\theta_1 = \frac{\pi(2 \cdot 0 + 1)}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\theta_2 = \frac{\pi(2 \cdot 1 + 1)}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

כלומר: הן מאונכות לציר הממשי.

נקודת חיתוך האסימפטוטות עם הציר הממשי :

$$\frac{0-10-10-(-5)}{3-1} = \frac{-15}{2} = -7.5$$

נקודת היציאה של ה RL מהציר הממשי היא ב -10: אין צורך להשתמש בכלל הנגזרת משום ששני הקטבים חייבים לעזוב את הציר הממשי מהנקודה הזו כדי להגיע לאסימפטוטות שלהם, כי ה RL לא קיים על הציר הממשי בתחום הזה.

בדיקה:

$$\frac{d}{dS} \left(\frac{1}{G(s)} \right) = \frac{d}{dS} \left(\frac{S(S+10)^2}{S+5} \right) = \frac{(S+10)(2S^2+15S+50)}{(S+5)^2} = 0$$

$$\Rightarrow S = -10$$

(למשוואה $2S^2+15S+50$ אין פתרון ממשי).

בסה"כ קיבלנו:

