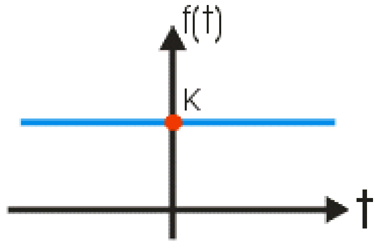
<u>נציין מספר צורות גל נפוצות</u> :

1. פונקציה קבועה Constant



עבור כל t : f(t)=k

2. פונקציה סינוסואידלית

$f(t) = A\cos(wt+\varphi)$

סימונים :

A   אמפליטודה, משרעת.

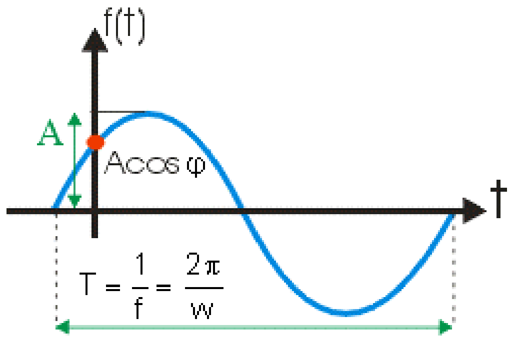
w   תדירות זוויתית $\left(\frac{\text{רדיאן}}{\text{שניה}}\right)$

f   תדירות (Hz).

מתקיים : $w = 2\pi f$.

φ - פזה (נהוג להגביל : $-\pi < \varphi \le \pi$)

$T = \frac{1}{f}$ - זמן מחזור.



את שלושת הגדלים A, w, φ מוצאים מתוך הציור (ראה סימונים על הגרף).

<u>הערה</u> : ל - φ יש שני פתרונות הנבדלים בסימנם. איך נקבע את הסימן של φ ?

לפי סימן הנגזרת הראשונה, משום ש : $\frac{df(t)}{dt}\Big|(t=0) = -A\sin\varphi$.

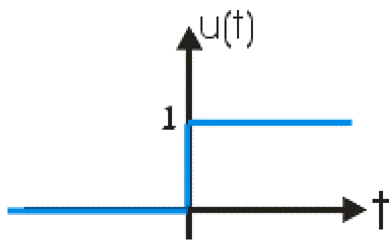
לכן :

אם f עולה אז $f' > 0$ ולכן $\sin\varphi < 0$ $\Leftarrow$ $\varphi < 0$, כלומר בתחום $(-\pi, 0)$.

אם f יורדת אז $f' < 0$ ולכן $\sin\varphi > 0$ $\Leftarrow$ $\varphi > 0$, כלומר בתחום $(0, \pi)$.

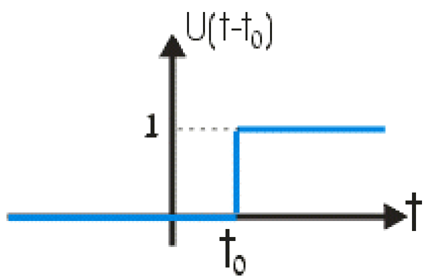
3. פונקצית מדרגה (step)

$$f(t) = u(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ \text{אי רציפות} & t=0 \\ 1 & t>0 \end{cases}$$

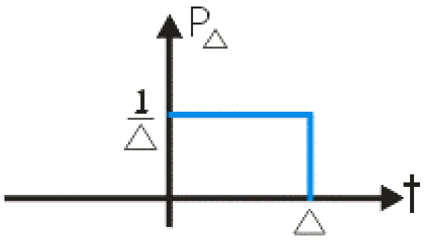


עבור t=0 נהוג לקבוע ערך 0, 0.5 או 1.

פונקצית מדרגה עם השהייה של t_0 , $u(t-t_0)$, נראית כך :



4. פונקצית הפולס (Pulse)



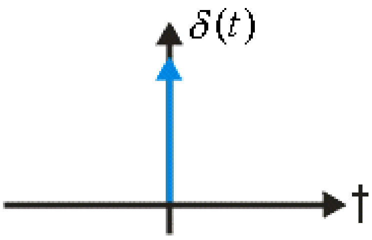
$$f(t)=P_\Delta(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ \frac{1}{\Delta} & 0<t<\Delta\\ 0 & t>\Delta\end{cases}$$

הקשר בין פולס לפונקצית מדרגה:

$$P_\Delta(t)=\frac{u(t)-u(t-\Delta)}{\Delta}$$

5. פונקצית ההלם (δ function, impulse, the Dirac delta)

למעשה זו אינה פונקציה, אלא גבול שאליו שואפת משפחה של פונקציות.
ההגדרה:



$$f(t)=\delta(t)=\begin{cases}\infty & t=0\\ 0 & t\neq 0\end{cases}$$

כאשר עבור כל a>0 : $\int_{-a}^{a}\delta(t)dt=1$

דוגמא כיצד לקבל $\delta(t)$: $\delta(t)=\lim_{\Delta\to 0}P_\Delta(t)$

משום שלפי הגדרת $P_\Delta(t)$ מתקיים עבור כל $\Delta>0$: $\int_{-\frac{1}{\Delta}}^{\frac{1}{\Delta}}P_\Delta(t)dt=1$

נציין מספר תכונות מעניינות של פונקצית ההלם:

1) הקשר בין הלם לפונקצית מדרגה: $u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(t')dt'$ ולכן $\frac{du(t)}{dt}=\delta(t)$.

2) תכונת הדגימה: עבור כל a>0 מתקיים השוויון: $\int_{-a}^{a}f(t)\delta(t)dt=f(0)$

הוכחה: $\int_{-a}^{a}f(t)\delta(t)dt=\lim_{\Delta\to 0}\int_{-a}^{a}f(t)p_\Delta(t)dt=\lim_{\Delta\to 0}\int_{0}^{\Delta}f(t)\cdot\frac{1}{\Delta}dt=f(0)\cdot\frac{\Delta}{\Delta}=f(0)$

3) ניתן להגדיר פונקצית הלם מוזזת $\delta(t-t_0)$ לפי:

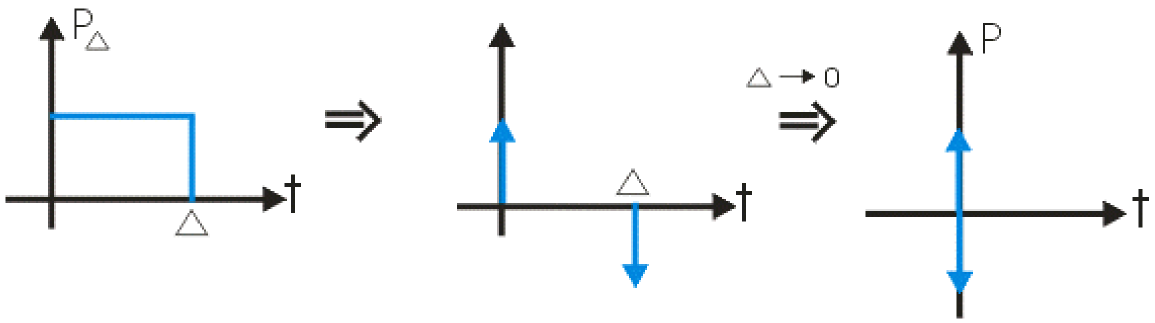
$$\begin{cases}\infty & t=t_0\\ 0 & t\neq t_0\end{cases}$$

וכן: $$\int_{t_0-a}^{t_0+a}\delta(t-t_0)dt=1$$

4) ניתן לדגום פונקציה בכל זמן ע"י: $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt=f(t_0)$ (בהמשך לתכונת הדגימה).

6. פונקצית הדובלט (Doublet)

זוהי הנגזרת של פונקצית ההלם: $$\delta(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta'(t')dt' \quad , \quad \delta'(t)=\frac{d\delta(t)}{dt}$$



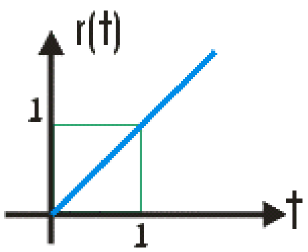
שימוש לדובלט יהיה עבור דגימת הנגזרת:

$$\int_{-a}^{a}\delta'(t)f(t)dt=f(t)\delta(t)\Big|_{-a}^{a}-\int_{-a}^{a}f'(t)\delta(t)dt=f(a)\underbrace{\delta(a)}_{0}-f(-a)\underbrace{\delta(-a)}_{0}-f'(0)=-f'(0)$$

בשוויון הראשון השתמשנו באינטגרציה בחלקים: $\int_{a_1}^{a_2}uv'=uv\Big|_{a_1}^{a_2}-\int_{a_1}^{a_2}vu'$ כאשר הצבנו: $u=f(t),v=\delta(t)$

. בשוויון השני השתמשנו בתכונת הדגימה.

ניתן להכליל ולהוכיח: $$\int_{-a}^{a}\delta^{(n)}(t)f(t)dt=(-1)^n f^{(n)}(0)$$



7. פונקצית הרמפה (ramp)

$$f(t)=r(t)=tu(t)=\int_{-\infty}^{t}u(t')dt'$$

וכן: $u(t)=\dfrac{dr(t)}{dt}$.

מתוך הפונקציות שלעיל והקשרים ביניהם, מקבלים את הסדרה הבאה: $r(t)\leftrightarrow u(t)\leftrightarrow\delta(t)\leftrightarrow\delta'(t)$, כאשר המעברים בין הפונקציות הם ע"י גזירה או אינטגרציה.

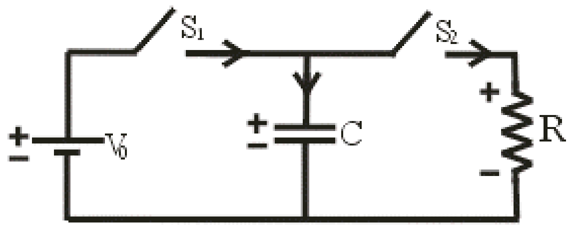
<u>מעגלים מסדר ראשון</u>

מעגלים מסדר ראשון הם מעגלים שתגובתם ניתנת לתיאור ע״י משוואה דיפרנציאלית מסדר ראשון.
כדי לפתור את המד״ר המתאימה למעגל, אנו נוקטים בגישה של הפרדת תנאי התחלה (פתרון ZIR) ובעיית המקורות (פתרון ZSR). בהמשך נסביר את משמעות השמות וההפרדה.

<u>פתרון ה- ZIR</u>

נמחיש את הפתרון ע״י שתי דוגמאות נפוצות של מעגלים מסדר ראשון:

<u>מעגל RC</u>



תחילה המתג S_1 סגור ולכן הקבל נטען
ל- $V_C = V_0$, כלומר: $V_C(t=0) = V_0$.
כעת נניח ש - S_1 נפתח ו - S_2 נסגר בו זמנית
ברגע $t=0$.
עבור כל $t \geq 0$ מתקיימים חוקי קירכהוף:

$$\text{KVL} \;\rightarrow\; V_C(t) = V_R(t)$$
$$\text{KCL} \;\rightarrow\; i_C(t) + i_R(t) = 0$$

וכמובן שמתקיימים קשרי המתח-זרם הרגילים על כל אלמנט:

על הנגד: $V_R = i_R R$

ועל הקבל: $i_C = C\dfrac{dV_C}{dt}$

$$V_C(0) = V_0$$

נציב ונקבל:

$$i_C(t) = C\frac{dV_C(t)}{dt} = -i_R(t) = -\frac{V_R(t)}{R} = -\frac{V_C(t)}{R}$$

$$\Rightarrow \quad C\frac{dV_C(t)}{dt} = -\frac{V_C(t)}{R}$$

ולכן:

$$RC\frac{dV_C(t)}{dt} + V_C(t) = 0 \quad , \quad V_C(0) = V_0$$

וזוהי המשוואה הדיפרנציאלית המתארת את תגובת המעגל.
פתרון המשוואה:

תחילה, נניח פתרון מהצורה הבאה: $V_C(t) = Ae^{Bt}$

נציב את תנאי ההתחלה בפתרון ונקבל: $A = V_0$,

כלומר: $V_C(t) = V_0 e^{Bt}$.

כעת נציב פתרון זה במשוואה ונקבל:

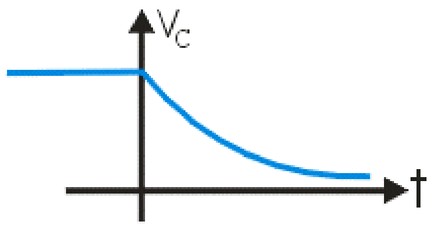
$$RC\frac{d\left[V_0 e^{Bt}\right]}{dt} + V_0 e^{Bt} = 0$$

נגזור ואז נציב t=0:

$$RCV_0 B + V_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad B = -\frac{1}{RC}$$

לכן סה"כ הפתרון הוא:

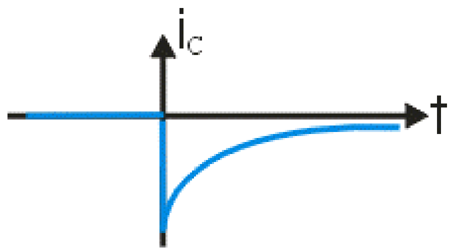
$$V_C(t)=V_0e^{-\frac{t}{RC}}$$



רואים שהמתח רציף אך בזרם יש קפיצה:

לפני זמן t=0 הזרם הוא אפס, כי המתח קבוע, ולאחר זמן t=0 מתקיים:

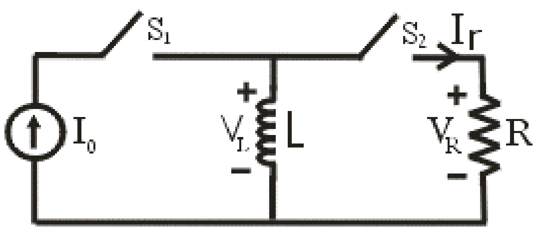
$$i_C(t)=C\frac{dV_C(t)}{dt}=C\frac{d\left[V_0e^{-\frac{t}{RC}}\right]}{dt}=-C\frac{V_0}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}=-\frac{V_0}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$$



הגודל RC נקרא "קבוע הזמן של המעגל", והמימד שלו הוא שניות: $RC=\frac{V}{A}\cdot\frac{Cb}{V}=\frac{Cb}{A}=\frac{Cb}{Cb/sec}=sec$

כאמור, הבעיה שלעיל מכונה Zero Input Response או בקיצור: ZIR. בבעיות אלו אין עירור חיצוני (כגון מקור מתח או זרם) המשפיע על המעגל (או שמניחים שהוא מאופס), אך ישנם תנאי התחלה (כמו המתח ההתחלתי על הקבל בדוגמה שלעיל) שגורמים לפעולת המעגל.

__מעגל RL__



המתג S_1 סגור עד $t=0$. ברגע $t=0$ המתג S_1 נפתח ו - S_2 נסגר בו-זמנית.

ברור לכן כי $I_L(t=0)=I_0$.

לפי KVL החל מרגע t=0 מתקיים:

$$L\frac{di_L}{dt}-V_R=0$$

ולפי KCL:

$$i_r=-i_L$$

נציב את הקשר:

$$V_R=Ri_r=-Ri_L$$

ונקבל: $L\frac{di_L}{dt}+i_LR=0$ כאשר נזכור ש: $I_L(t=0)=I_0$,

וזוהי המשוואה הדיפרנציאלית המתארת את תגובת המעגל.

פתרון המשוואה הדיפרנציאלית:

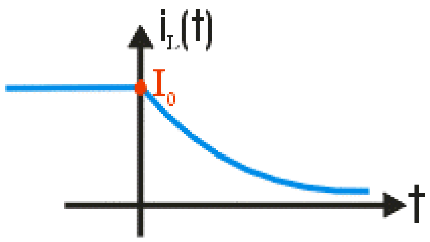
תחילה, נניח פתרון מהצורה הבאה: $I_L(t)=Ae^{Bt}$

נציב את תנאי ההתחלה בפתרון ונקבל: $A=I_0$, כלומר: $I_L(t)=I_0e^{Bt}$.

לחישוב B נציב במשוואה את מה שקיבלנו:

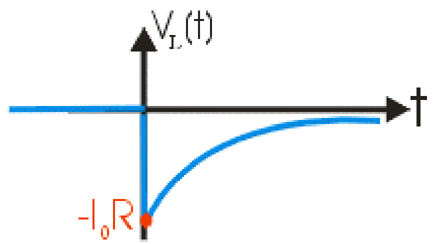
$$L\frac{d\left[I_0e^{Bt}\right]}{dt}+RI_0e^{Bt}=0$$

$$LI_0Be^{Bt}+RI_0e^{Bt}=0$$
$$(LB+R)e^{Bt}=0$$
$$LB+R=0\quad\Rightarrow\quad B=-\frac{R}{L}$$



ולכן הפתרון הוא:

$$i_L(t)=I_0e^{-\frac{R}{L}t}$$



ועבור המתח נקבל:

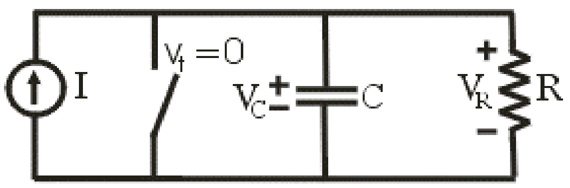
$$V_L(t)=-L\cdot I_0\cdot\frac{R}{L}e^{-\frac{R}{L}(t)}=-I_0Re^{-\frac{R}{L}t}$$

שתי הדוגמאות לעיל היו עבור מעגלים ללא מקורות (מקורות אפס) אך עם תנאי התחלה.

נסכם: **ZIR היא תגובה לתנאי ההתחלה כאשר אין עירור חיצוני במעגל.**

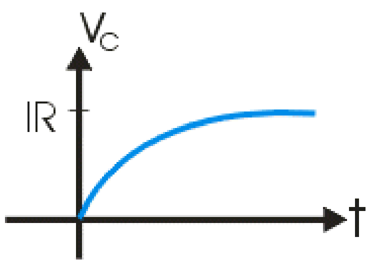
כעת נעבור למקרה ה Zero State Response ZSR.
זהו המקרה המשלים בו תנאי ההתחלה הינם אפס (או שמניחים שהם מאופסים) אך קיים עירור במעגל.

פתרון ה- ZSR



נתבונן במעגל הבא:
ב - $t=0$ המתג נפתח. נתון: $V_C(0)=0$.
עבור הזמן t>0, נקבל מתוך KVL: $V_c=V_R=V$
ומתוך KCL: $C\frac{dv}{dt}+\frac{V}{R}=I$

יש לפתור משוואה דיפרנציאלית זו עם תנאי התחלה $V(t=0)=0$.
לפני שנפתור פורמלית את הבעיה, ננסה להבין את הפתרון באופן אינטואיטיבי:
כיוון שהמתח על קבל הוא רציף: $V_c(0^-)=V_C(0^+)$, אז עבור t=0+ נקבל: $V(0^+)=0$, כלומר: המתח על הקבל חייב להישאר אפס גם ברגע הראשון לאחר פתיחת המתג, ולפיכך הקבל הוא קצר ולכן כל הזרם עובר דרכו:
$C\frac{dv}{dt}\Big|(t=0^+)=I$.
עבור $t\to\infty$ (המצב העמיד של המעגל), כל הזרם יזרום דרך הנגד,
מכיוון שהקבל נהיה נתק: $\frac{dV_C}{dt}=0$,
ולכן $\frac{V(t\to\infty)}{R}=I\quad\Leftarrow\quad V(t\to\infty)=IR$



על כן, מידיעת האסימפטוטות ב- $t=0$ ו- $t\to\infty$, ניתן לתאר באופן סכמתי את המתח V_C:

כעת נעבור לפתרון הפורמלי:
הפתרון הכולל של משוואה מהסוג הזה הוא:

$$V = V_n + V_p$$

פתרון כולל
פתרון משוואה הומוגנית
פתרון פרטי התלוי במבוא

את הפתרון הזה, תמיד נכפיל בפונקצית מדרגה $u(t)$, שכן העירור החל לפעול רק בזמן $t=0$ ולפני זה ת״ה הם אפס, לכן התגובה כולה היא תמיד אפס עבור $t<0$. אם העירור הוא עירור מוזז לזמן $t=t_0$, אז נכפיל בהתאם ב - $u(t-t_0)$.

נפרט מהם שני סוגי הפתרונות: פתרון המשוואה ההומוגנית הוא פתרון המד״ר שקיבלנו, כאשר מאפסים את צד ימין של המשוואה: $C\frac{dV_n}{dt}+\frac{V_n}{R}=0$. פתרון זה נועד לאלץ ת״ה אפס. גם כאן מנחשים פתרון אקספוננציאלי K_1e^{Bt} ופותרים כמו במקרה ה- ZIR, אך נישאר עדיין עם הקבוע K_1 שייקבע רק בהמשך. נקבל: $V_h = K_1e^{Bt}$, $B=-\frac{1}{RC}$.

הפתרון הפרטי הוא פתרון המד״ר: $C\frac{dV_p}{dt}+\frac{V_p}{R}=I$. כדי לפתור משוואה זו, ננחש לרוב פתרון שהוא מצורת העירור: מכיוון שבמקרה זה הזרם I הוא קבוע, אנו ננחש פתרון שגם הוא קבוע: $V_p = A$. מהצבת הפתרון במד״ר נקבל: $0+\frac{A}{R}=I$ (כי נגזרת של קבוע היא אפס), ולכן נסיק שהפתרון הפרטי הוא: $V_p = RI$.

נשים לב שמכיוון שמתקיים: $\frac{dV}{dt}=\frac{dV_p}{dt}+\frac{dV_n}{dt}$, אז סכום שתי המשוואות שלעיל נותן בדיוק את המשוואה המקורית שהיינו צריכים לפתור, ואשר עבורה מתקיימים ת״ה אפס.

סה״כ קיבלנו:

$$\text{עבור } t>0 \qquad \begin{cases} V_n = K_1e^{-\frac{t}{RC}} \\ V_p = RI \end{cases}$$

לכן נסכם את הפתרונות ונציב את תנאי ההתחלה באפס:

$$V(t) = K_1e^{-\frac{t}{RC}} + RI = IR\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)u(t)$$

$$V(0)=0$$

$$\Downarrow$$

$$K_1 = -IR$$

וזהו פתרון ה-ZSR הכולל.

תגובה כוללת

התגובה הכוללת של מעגל כללי היא הסכום: פתרון ZIR + פתרון ZSR.

נחזור לדוגמא של מעגל RC עם מקור הזרם הקבוע. ראינו שפתרון ה-ZSR הוא: $V_C = IR\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)u(t)$,

ופתרון ה-ZIR הוא: $V_C = V_0 e^{-\frac{t}{RC}}$. לכן נסכם את התגובה הכוללת: $V(t) = V_0 e^{-\frac{t}{RC}} + IR\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)u(t)$.

ניתן להסתכל על הפתרון גם כסכום של פתרון חולף ופתרון עמיד:

$$V(t) = \underbrace{V_0 e^{-\frac{t}{RC}}}_{\text{חולף}} + \underbrace{IR}_{\text{עמיד}}\left(1-\underbrace{e^{-\frac{t}{RC}}}_{\text{חולף}}\right)u(t)$$

משום שהאקספוננטים דועכים עם הזמן ($t \to \infty$).
יש לשים לב שלפתרון העמיד תורם העירור בלבד. לפתרון החולף תורמים גם העירור וגם המצב ההתחלתי.

נלמד כעת מספר מושגים הנוגעים למעגלים חשמליים לינאריים, שישמשו אותנו בהמשך.

<u>לינאריות של התגובה למצב אפס:</u>

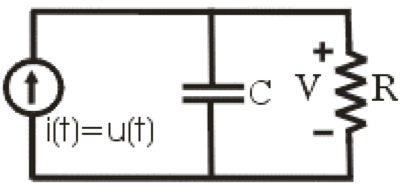
לינאריות של התגובה למצב אפס (ZSR), פירושה קשר לינארי בין מוצא המעגל לכניסת המעגל (המבוא). נגדיר קשר לינארי: אם נסמן: $y = H[x]$, כאשר x היא הכניסה (מבוא) ו- y היא תגובת המערכת (מוצא) בתנאי ההתחלה אפס, אז המערכת היא לינארית אם יתקיימו שני התנאים הבאים:

$$H[ax] = aH[x]$$
$$H[x_1 + x_2] = H[x_1] + H[x_2]$$

<u>אי תלות בזמן Time invariance של התגובה למצב אפס:</u>

בהנחה שהמקור מופעל ברגע מסוים ($t = 0$ למשל) אנו מקבלים תגובה מסוימת. עבור מקור דומה המופעל ברגע $t = \tau$, נקבל את אותה תגובה מוזזת ב- τ.

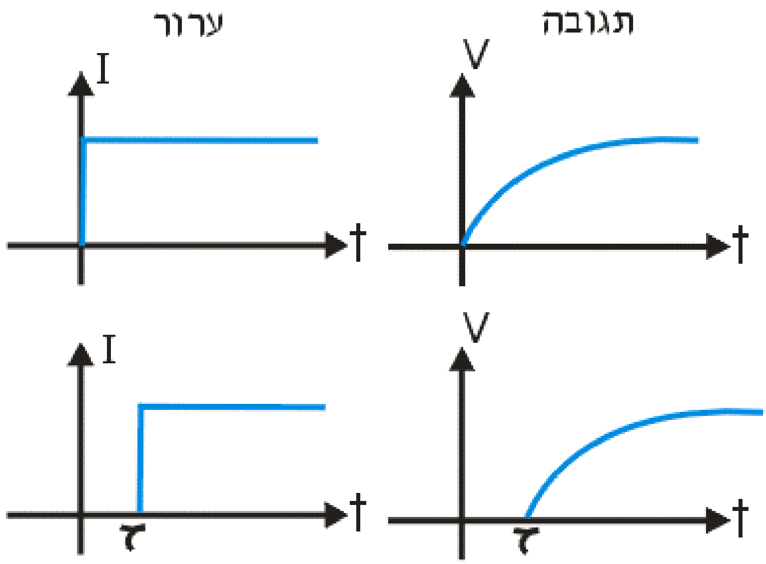
לדוגמא המעגל הבא:



נניח שנתון: $i(t) = I \cdot u(t)$
(כלומר מקור קבוע החל מרגע אפס).

ראינו כי פתרון ה- ZSR הוא: $V(t)=IRu(t)\left[1-e^{-\frac{t}{RC}}\right]$

נדגים את משמעות אי התלות בזמן ע"י הגרפים הבאים:



כאמור, הזזה בזמן של הכניסה גורמת לאותה הזזה בזמן ביציאה.

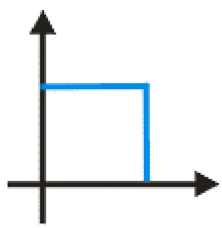
<u>הוכחה</u>: עבור המקרה המוזז התגובה תהיה $y(t)$ ולכן מתקיימת המד"ר $C\frac{dy(t)}{dt}+\frac{y(t)}{R}=I\cdot u(t-\tau)$.

נציב: $t=t-\tau$, $dt=dt$ ונקבל: $C\frac{dy(t+\tau)}{dt}+\frac{y(t+\tau)}{R}=I\cdot u(t)$. אך ידוע לנו ש: $C\frac{dv(t)}{dt}+\frac{v(t)}{R}=I\cdot u(t)$

נותן את התגובה $v(t)$ ולכן המקרה המוזז ייתן את התגובה:

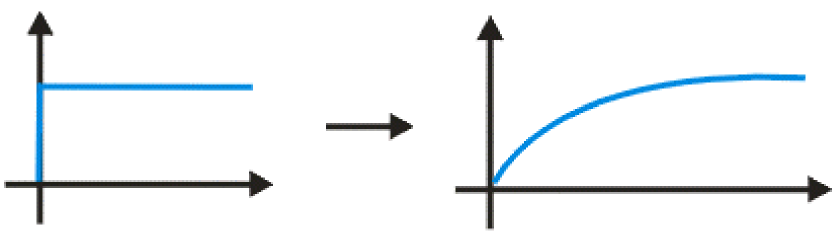
$$y(t-\tau)=v(t) \quad\Rightarrow\quad y(t)=v(t-\tau) \quad\Rightarrow\quad y(t)=v(t-\tau)$$

<u>דוגמא</u>: מה תהיה התגובה עבור העירור הבא:



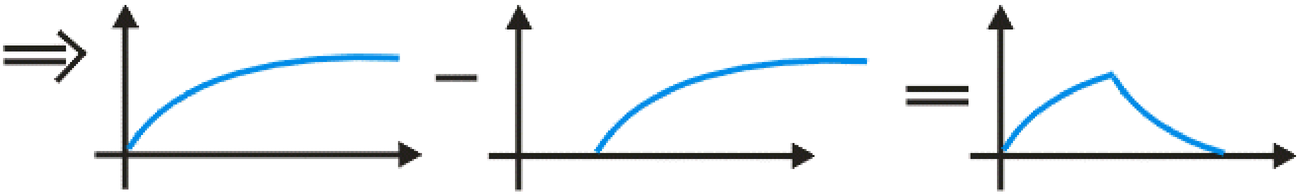
תוך שימוש בעקרון הסופר פוזיציה ועקרון אי התלות בזמן ניתן לרשום:

ידועה לנו התגובה למדרגה:



נוכל לפרק פולס לחיסור מדרגה מוזזת ממדרגה בראשית הזמן :

ולכן גם לחסר את שתי התגובות למדרגות כדי לקבל את התגובה לפולס :

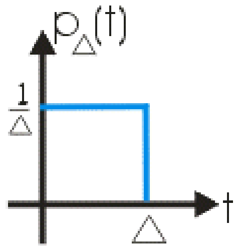


<u>תגובת הלם Impulse response</u>

למדנו את התגובה לפונקצית מדרגה. לגבי עירור שהוא הלם : $\delta(t)=\lim\limits_{\Delta\to\infty}P_\Delta(t)$

כאשר נזכיר
את פונקצית הפולס :

$$P_\Delta(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ \frac{1}{\Delta} & \Delta>t\geq 0\\ 0 & t>0\end{cases}$$



ניתן לרשום $P_\Delta(t)=\frac{1}{\Delta}(u(t)-u(t-\Delta))$.

נקרא לתגובת המדרגה $S(t)$. בגלל הליניאריות והאי תלות בזמן התגובה ל - P_Δ תהיה :

$h_\Delta(t)=\frac{1}{\Delta}(S(t)-S(t-\Delta))$. ולכן התגובה להלם היא : $h(t)=\lim\limits_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}(S(t)-S(t-\Delta))=\frac{ds}{dt}$

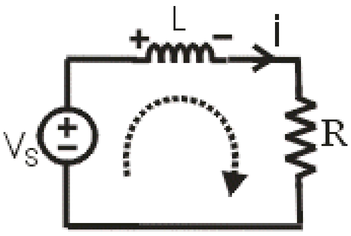
מכאן קיבלנו שהתגובה להלם (ZSR) היא הנגזרת של תגובת המדרגה (ZSR).

הערה : תגובת ההלם של מעגל מסומנת ב - $h(t)$.

<u>דוגמאות לפתרונות ZSR :</u>

<u>דוגמא 1 :</u>

נתבונן במעגל הבא וננסה למצוא את תגובת הזרם למקור המתח בתנאי התחלה אפס (ZSR) :



מתוך KVL עבור הלולאה נקבל : $L\frac{di}{dt}+iR=V_S(t)$.

עבור העירור : $V_S(t)=u(t)$

וכן: $i\left(t=0^-\right)=0$

נקבל את המד"ר: $\frac{di}{dt}+\frac{R}{L}i=\frac{1}{L}u(t)$ עם ת"ה אפס.

פתרון פרטי: מכיוון שהעירור מתחיל בזמן $t=0$, והחל מזמן זה העירור נשאר קבוע, ננחש פתרון פרטי קבוע

ונציב:
$$i_p=A\ \Rightarrow\ \frac{dA}{dt}+\frac{AR}{L}=\frac{1}{L}\ \Rightarrow\ \frac{AR}{L}=\frac{1}{L}\ \Rightarrow\ A=\frac{1}{R}\ \Rightarrow\ i_p=\frac{1}{R}$$

פתרון הומוגני: שוב ננחש פתרון מהצורה: $i_H=Ae^{Bt}$ ונציב אותו במד"ר: $\frac{di}{dt}+\frac{R}{L}i=0$ ונקבל:
$i_H=Ae^{-\frac{R}{L}t}$. מתנאי הגבול $i(t=0)=0$ מקבלים: $A=-\frac{1}{R}$ ולכן סה"כ: $i_H=-\frac{1}{R}e^{-\frac{R}{L}t}$.

הערה: הנחנו כאן הנחה סמויה ש- $i(t)$ פונקציה רציפה ולכן אם: $i\left(t=0^-\right)=0$ אז גם: $i(t=0)=0$. הנחה זו אכן מתקיימת במקרה זה. בהמשך נראה מתי הנחה זו לא מתקיימת.

אם כך, תגובת ה-ZSR הכוללת למדרגה היא:
$$i(t)=S(t)=\frac{1}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)u(t)$$

כזכור, תגובת ההלם היא הנגזרת של התגובה למדרגה:
$$h(t)=\frac{ds}{dt}=\frac{1}{R}\left[\frac{R}{L}e^{-\frac{R}{L}t}\right]u(t)+\underbrace{\frac{1}{R}\left[1-e^{-\frac{R}{L}t}\right]\delta(t)}=\frac{1}{R}\cdot\frac{R}{L}e^{-\frac{R}{L}t}u(t)=\frac{1}{L}e^{-\frac{R}{L}t}u(t)$$

כל האיבר הזה מתאפס:
ה- δ היא אפס בכל הזמנים פרט ל- $t=0$.
אם נציב זמן זה, המקדם שלפני ה- δ יתאפס.
לכן בכל הזמנים האיבר הוא אפס.

נתבונן בפתרון שמצאנו ונבחין כי צורתו דומה לפתרון משוואה הומוגנית מסדר ראשון. תופעה זו צפויה מראש שכן המד"ר אותה פתרנו הינה הומוגנית עבור $t>0$, כי בזמנים אלו הפונקציה $\delta(t)$ שווה זהותית לאפס. פונקצית ההלם, אם כן, גורמת רק ל-'עדכון' של תנאי ההתחלה.

ננסה כעת לפתור בצורה ישירה את המד"ר $\frac{dh}{dt}+\frac{R}{L}h=\frac{1}{L}\delta(t)$, לא ע"י שימוש במעבר דרך פונקצית המדרגה.

בעיה זו הינה בעיית ZSR. לפיכך נתון כי $h(t=0^-)=0$ ועל כן: $h(t<0)=0$.

מתוך התבוננות במד"ר, ניתן להבחין כי $h(t)$ מכילה אי רציפות מסדר ראשון (קפיצה סופית) בראשית, כך שהנגזרת שלה מכילה הלם. $h(t)$ אינה יכולה להכיל קפיצה אינסופית בראשית (הלם או נגזרותיה), כיוון שאז המד"ר לא תתקיים (אגף ימין היה צריך להכיל גם נגזרות של הלם).

עבור הזמנים $t>0$, כאמור המשוואה היא הומוגנית: $\frac{dh}{dt}+\frac{R}{L}h=0$. לכן הופעתה של פונקצית ההלם בזמן $t=0$, רק תשנה לנו את תנאי התחלה לת"ה חדש בזמן $t=0^+$.

אם כן נסיק כי: $h(t)=i_h(t)u(t)$, כאשר $i_h(t)$ הינה פתרון של המשוואה ההומוגנית המתאימה. כל שנותר לעשות הוא למצוא מהם תנאי ההתחלה בזמן $t=0^+$ שנוצרו ע"י ההלם, ולפתור את המשוואה ההומוגנית.

על מנת למצוא את ת"ה $h(t=o^+)$, נבצע אינטגרציה מזמן $t=0^-$ ועד לזמן $t=0^+$ על המד"ר:
$$\int_{0^-}^{0^+}h'(t)dt+\frac{R}{L}\int_{0^-}^{0^+}h(t)dt=\frac{1}{L}\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)dt$$

כדי לפתור את המשוואה הזו, נזכור ש - $h(t)$ מכילה קפיצה סופית בלבד בראשית ועל כן האינטגרל על פניה בתחום אינפיטיסימלי הינו אפס. בנוסף מתקיים: $\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)dt = 1$. לכן נקבל: $h(0^+) - h(0^-) + \frac{R}{L}0 = \frac{1}{L}1$.

אמרנו כבר ש - $h(0^-) = 0$, כי זהו פתרון ZSR, ולכן סה"כ: $h(0^+) = \frac{1}{L}$, וזהו ת"ה החדש שחיפשנו.

כעת, אם נפתור את המד"ר: $\frac{dh}{dt} + \frac{R}{L}h = 0$; $h(0^+) = \frac{1}{L}$, נקבל: $h(t) = \frac{1}{L}e^{-\frac{R}{L}t}u(t)$. כמובן שהגענו לאותו פתרון בשתי הדרכים.

<u>לסיכום:</u> במד"ר בה מופיעה פונקצית הלם באגף ימין ניתן להסיק כי השפעתה הינה שינוי של ת"ה מזמן $t = 0^-$ (בו הם אפס) לזמן $t = 0^+$ ופתרון המד"ר עבור t>0 יהיה זהה לפתרון המשוואה ההומוגנית עם ת"ה החדש.