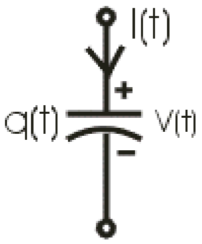
קבלים Capacitors



הגדרה: קבל הינו רכיב בו המתח בין הדקיו קובע את המטען עליו: $q = q(v)$.

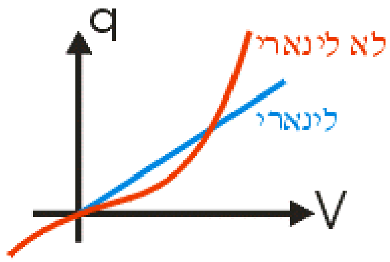
הסימון עבור קבל:

קבל יכול להיות בעל קיבול משתנה או קבוע בזמן.

$q(t)$ הוא המטען בזמן t על הלוח אליו מוביל

חץ הייחוס של הזרם $i(t)$. לכן ניתן לרשום:

$$i(t) = \frac{dq}{dt}$$



<u>קבל ליניארי:</u> קבל עבורו הפונקציה $q(v)$ היא ליניארית:

$q(t) = Cv(t)$ ולכן מתקיים עבורו:

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = C\frac{dv}{dt} = \frac{1}{s}\frac{dv}{dt}$$

כאשר: C קיבוליות, s - אלסטיות, ומתקיים: $s = \frac{1}{c}$, $C = \frac{dq}{dv}$.

עבור קבל ליניארי, הקשר החשוב ביותר שנשתמש בו במשך כל הקורס הוא:

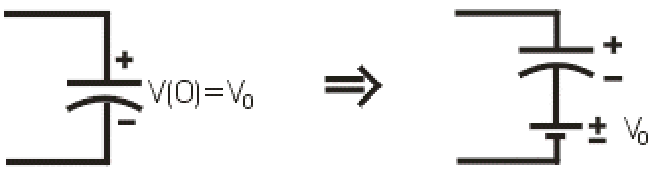
$$\boxed{i(t) = C\frac{dv}{dt}}$$

לכן צורת הגל של הזרם $i(t)$ נקבעת חד ערכית ע"י צורת הגל של המתח. כלומר אם נתון $v(t)$ ניתן לחשב את $i(t)$ באופן חד-ערכי.

הקשר ההפוך:
$$v(t) = v(0) + \frac{1}{c}\int_0^t i(t')dt'$$

כאן הקשר הוא לא חד ערכי, יש לדעת את $i(t)$ וכן את $v(0)$ כדי לחשב את $v(t)$. מכאן נובע שלקבלים יש תכונת זיכרון.

ניתן לבטא את תנאי ההתחלה
בעזרת מקור מתח תוך הנחת
תנאי התחלה מאופסים על הקבל:



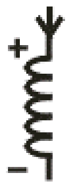
__משרנים inductors__

השטף המגנטי בתוך סליל (נמדד ביחידות ובר), נסמנו ϕ , נקבע חד ערכית ע״י הזרם:

$$\phi=\phi(i)=Li$$

כאשר: L השראות ביחידות $\frac{\text{ובר}}{\text{אמפר}}$.

הסימון עבור סליל הוא:

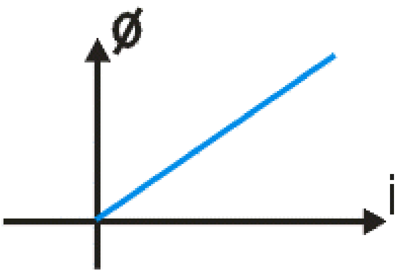


לפי חוק פארדיי תמיד מתקיים: $V=\frac{d\phi}{dt}$.

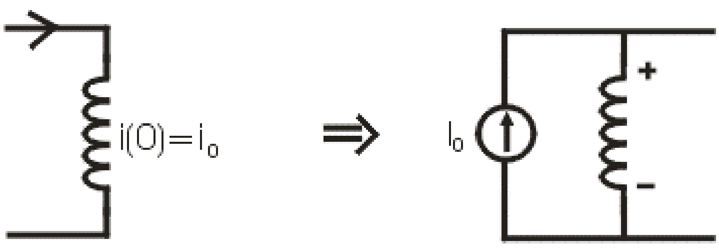
__משרן ליניארי:__

אם L קבוע אז לפי חוק פארדיי ניתן לרשום: $\boxed{V=L\frac{di}{dt}}$

או בצורה אינטגרלית: $i=i(0)+\frac{1}{L}\int_0^t v(t')dt'$

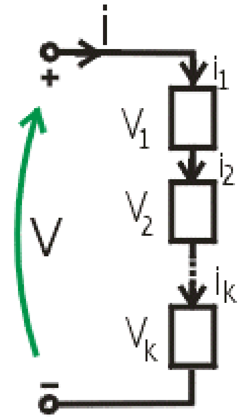


כלומר צורת הגל של המתח היא פונקציה חד ערכית של הזרם אך לא להפך. לכן, בדומה לקבלים גם למשרנים יש זיכרון: לא מספיק לדעת את המתח, אלא חייבים לדעת גם את i(0) בכדי לקבוע את הזרם בכל רגע.
ניתן לבטא את תנאי ההתחלה בעזרת מקור זרם תוך הנחת תנאי התחלה מאופסים על הסליל:



מעגלים פשוטים   חיבורים מקבילים וטוריים

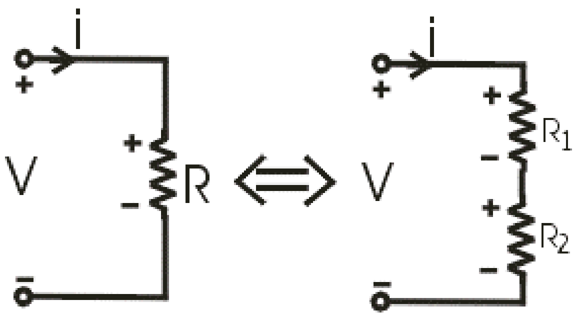
חיבורים טוריים



באופן כללי:

$$i = i_1 = i_2 = ... = i_k$$
$$v = v_1 + v_2 + ... + v_k$$

נגדים:



$$(*)\ \begin{cases} i = i_1 = i_2 \\ v - v_1 - v_2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad v = v_1 + v_2$$

עבור נגדים ליניאריים:
נרצה להחליף את שני הנגדים המחוברים בטור לנגד אחד שקול.
על הנגד השקול ייפול מתח V ויזרום זרם I, לכן:

$$R = \frac{v}{i} = \frac{v_1 + v_2}{i} = \frac{v_1}{i} + \frac{v_2}{i} = \frac{v_1}{i_1} + \frac{v_2}{i_2} = R_1 + R_2$$ → הנגד האקוויוולנטי

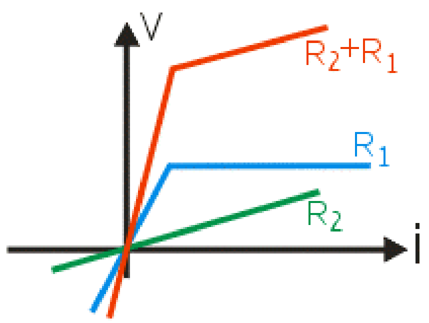
הראינו, אם כן, ש: $R = R_1 + R_2$. ניתן להכליל גם ליותר מ- 2 נגדים: $R = R_1 + R_2 + ...$ וכן למקרה התלוי בזמן

$$R(t) = R_1(t) + R_2(t) + ...$$

נסכם ונאמר שבאופן כללי ההתנגדות השקולה לחיבור טורי של נגדים היא סכום ההתנגדויות:

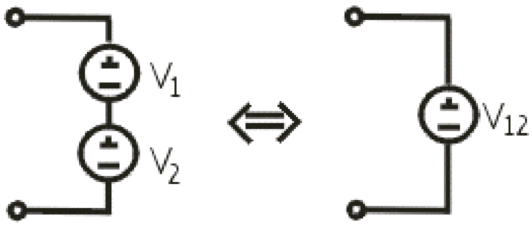
$$\boxed{R = \sum_k R_k}$$

אם הנגדים אינם ליניאריים ויש להם אופיין v(i) , איך נחשב התנגדות שקולה?
ניח שנתונים שני אופייניים $v_1(i_1)$ ו- $v_2(i_2)$. המשוואות המסומנות ב- * עדיין מתקיימות ולכן ניתן לחבר את האופיינים:



באופן אנליטי: אם $v_1 = f_1(i_1)$, $v_2 = f_2(i_2)$

אזי: $v_{1+2} = f_1(i) + f_2(i)$

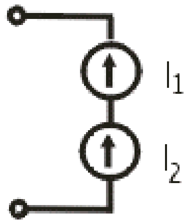


<u>מקורות מתח</u>:

מתקיימת השקילות: $v_{12}=v_1+v_2$

וניתן להכליל: $\boxed{V=\sum_n V_n}$

עבור חיבור מספר כלשהו של מקורות מתח בטור.



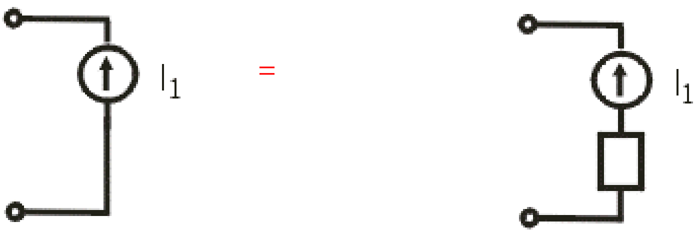
<u>מקורות זרם</u>:

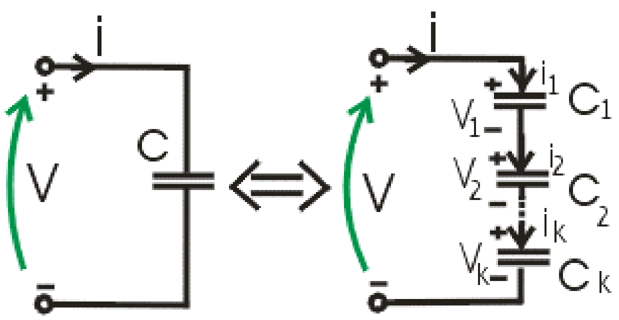
עבור מקורות זרם בטור:

מבחינה פיזיקלית, מצב זה יתכן רק אם $i_1=i_2$.

כלומר, באופן כללי לא מחברים מקורות זרם בטור.

מקור זרם המחובר בטור לאלמנט אחר שקול למקור זרם בלבד:





<u>קבלים</u>:

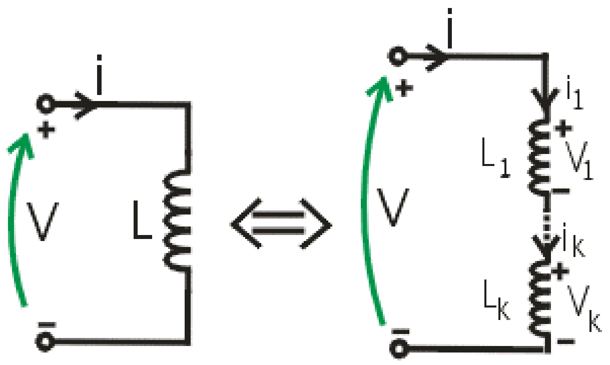
$$\begin{cases} v=v_1+v_2 \\ i=i_1=i_2 \end{cases}$$

ידוע כי על הקבל ה-k: $v_k(t)=v_k(0)+\frac{1}{C_k}\int_0^t i_k(t')dt'$

ולכן $v(t)=\sum_k v_k=\sum_k v_k(0)+\sum_k\frac{1}{C_k}\int_0^t i_k(t')dt'=v(0)+\left(\sum_k\frac{1}{Ck}\right)\cdot\int_0^t i_k(t')dt'$

נובע מכך:

$$\boxed{\begin{gathered} v(0)=\sum_k v_k(0) \\ 1/C=\sum_k\frac{1}{Ck}\quad,\quad S=\sum_S S_k \end{gathered}}$$



<u>סלילים</u>:

עבור סלילים ליניאריים:

$$i = i_1 = i_2 = \ldots = i_k$$

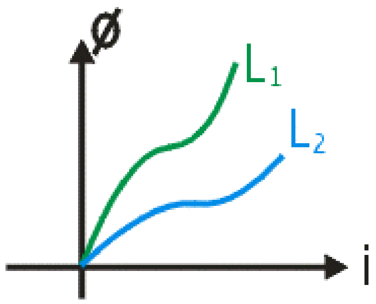
$$v_k = L_k \frac{di_k}{dt}$$

$$v = \sum_k V_k = \sum_k L_k \frac{di_k}{dt} = \left(\sum_k L_k\right)\frac{di}{dt}$$

נובע מכך:

$$\boxed{\begin{array}{c} L = \Sigma L_k \\ i(0) = i_k(0) \end{array}}$$

עבור המקרה של סלילים לא ליניאריים הנתונים ע"י אופיין הזרם-שטף שלהם:



נזכור כי המתח הוא הנגזרת של השטף התלוי בזרם.

לכן:

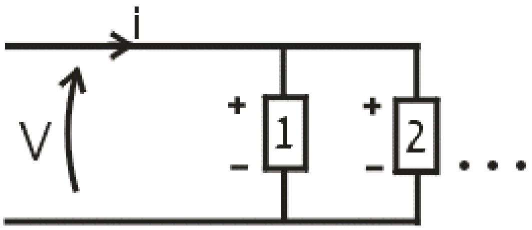
$$V = \sum_k V_k = \sum_k \frac{d}{dt}\phi_k(i_k) = \frac{d}{dt}\sum_k \phi_k(i) = \frac{d}{dt}\phi(i)$$

$$\phi(i) = \sum_k \phi_k(i)$$

כלומר יש לחבר את השטפים בכדי לקבל את השטף השקול דרך כל הסלילים.

<u>חיבורים מקביליים:</u>

באופן כללי:

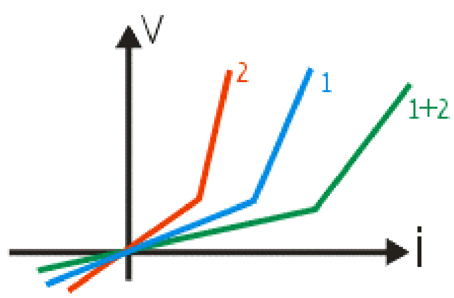


$$i = i_1 + i_2 + \ldots$$
$$v = v_1 = v_2 = \ldots$$

<u>נגדים</u>:

כאמור מתקיים הקשר בין הזרמים:

$$i = \Sigma i_k$$



בנגדים ליניאריים:

$$i_k = G_k V_k = \frac{V_k}{R_k} = \frac{V}{R_k}$$

לכן:

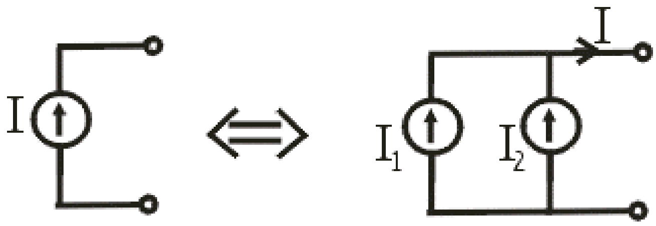
$$G = \Sigma G_k$$

או באופן שקול:

$$\boxed{\frac{1}{R} = \Sigma \frac{1}{R_k}}$$

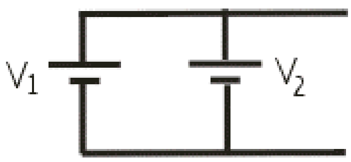
<u>מקורות זרם</u>:

$i = i_1 + i_2$



<u>מקורות מתח</u>:

עבור מקורות מתח במקביל:



מבחינה פיזיקלית, מצב
זה יתכן רק אם $v_1 = v_2$.
כלומר, באופן כללי לא מחברים
מקורות מתח במקביל.

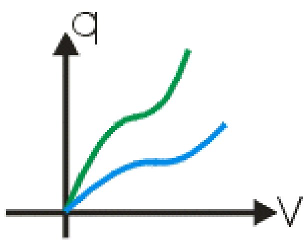
<u>קבלים</u>:

בקבלים מתקיים הקשר: $i_k = C_k \frac{dv_k}{dt}$

שוב נציב בסכום הזרמים ונקבל: $i = \Sigma i_k = \sum_k C_k \left(\frac{dv_k}{dt}\right) = \sum_k C_k \left(\frac{dv}{dt}\right) = \left(\frac{dv}{dt}\right) \sum_k C_k$

לכן עבור הקבל השקול מתקיים:

$$\boxed{\begin{gathered} C = \Sigma C_k \\ v(0) = v_1(0) = \ldots v_k(0) \end{gathered}}$$



בקבל לא לינארי:

$$i = \sum_k i_k = \sum_k \frac{dq_k}{dt} = \frac{d\Sigma q_k}{dt} = \frac{dq}{dt}$$

כלומר גם במקרה זה נבצע חיבור אנכי של המטענים.

<u>סלילים</u>:

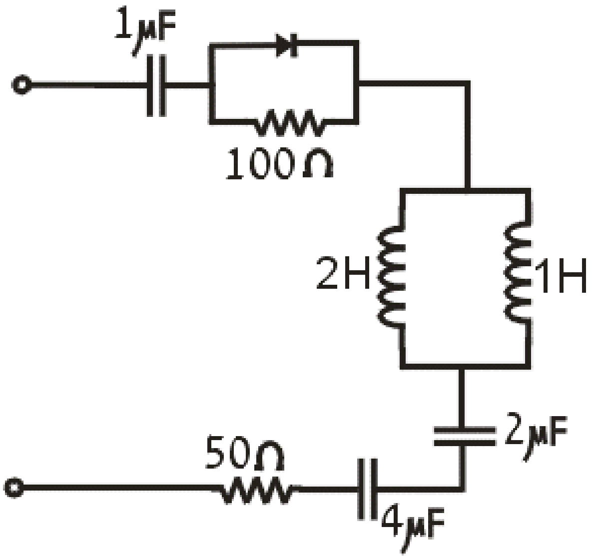
בסלילים מתקיים הקשר: $i_k = i_k(0) + \frac{1}{L_k}\int_0^t v_k(t')dt'$

ולכן: $i = \Sigma i_k = \Sigma i_k(0) + \sum_k \frac{1}{L_k}\int_0^t v_k(t')dt = \Sigma i_k(0) + \int_0^t v_k(t')dt \left(\sum_k \frac{1}{L_k}\right)$

נובע מכך שהסליל השקול יקיים:

$$\boxed{\begin{gathered} \frac{1}{L} = \sum_k \frac{1}{L_k} \\ i(0) = \Sigma i_k(0) \end{gathered}}$$

דוגמא: פשט את המעגל הבא:



פתרון:

תחילה נמצא את הקבל השקול לשלושת הקבלים במעגל. מכיוון שהקבלים מחוברים בטור: $\frac{1}{C}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$

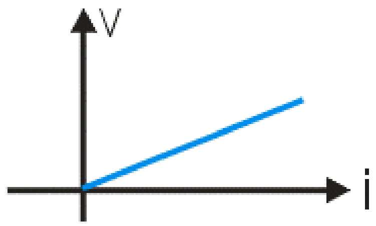
וקיבלנו את הקבל השקול: $C=\frac{4}{7}\ \mu F$

כעת, נמצא את הסליל השקול לשני הסלילים שבמעגל. הסלילים מחוברים במקביל: $\frac{1}{L}=\frac{1}{2}+\frac{1}{1}=\frac{3}{2}$

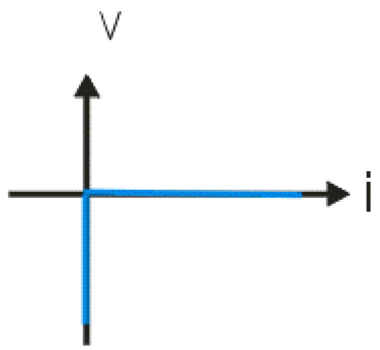
ולכן הסליל השקול הוא: $L=\frac{2}{3}\ \mathrm{H}$

נעבור לפשט את חיבור הדיודה ושני הנגדים:

תזכורת:

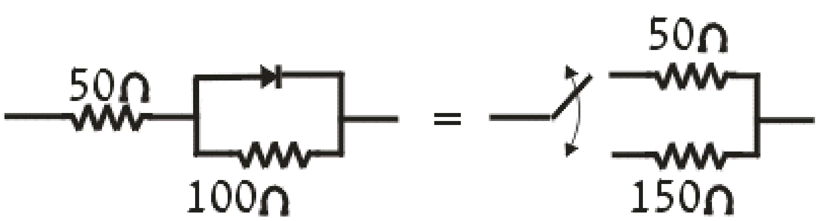


דיודה

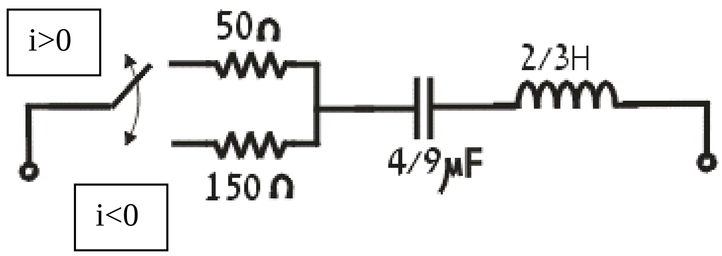


דיודה אידיאלית

ישנם שני מצבים אפשריים לפעולת הדיודה: כאשר הזרם עליה חיובי הדיודה היא קצר (בהנחה שהיא אידיאלית) ולכן היא מקצרת את הנגד $100\ \Omega$, כלומר לא זורם עליו זרם. כאשר הזרם שלילי, הדיודה היא נתק ולכן הזרם לא יכול לזרום דרכה. אז נקבל חיבור רגיל של שני נגדים בטור שנותן נגד שקול של $150\ \Omega$:



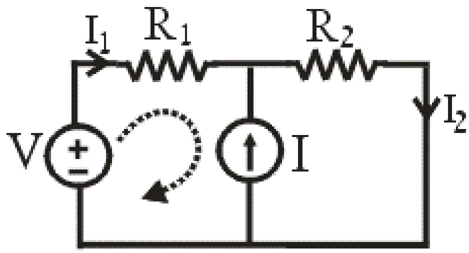
לכן המעגל המפושט הוא:



עקרון הסופר-פוזיציה:

כאשר יש קשר ליניארי בין ערוך ותוצאותיו, השפעת מספר ערורים הפועלים יחד הינה שווה לסכום כל ערור הפועל לחוד כאשר שאר מקורות המתח מקוצרים ומקורות הזרם מנותקים.

דוגמא:



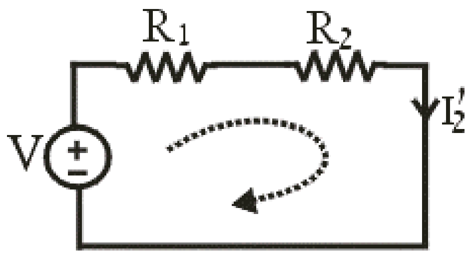
ניתן לראות ישירות מהמעגל (לפי חוקי קירכהוף) שמתקיים:

$$v = (I_2 - I)R_1 + I_2 R_2$$

$$\Downarrow$$

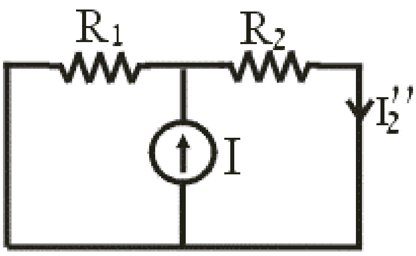
$$I_2 = \frac{V}{R_1+R_2} + I\frac{R_1}{R_1+R_2} = I_2' + I_2''$$

נפתור לפי עקרון הסופר-פוזיציה:
תחילה נבחן את השפעת מקור המתח.
לכן ננתק את מקור הזרם ונקבל:



$$I_2' = \frac{V}{R_1+R_2}$$

כעת נבחן את השפעת מקור הזרם.
לכן נקצר את מקור המתח ונקבל:



$$I_2'' = I\cdot\frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}}\cdot\frac{1}{R_2} = I\cdot\frac{R_1}{R_1+R_2}$$

וכמובן שקיבלנו את אותה תוצאה בשתי השיטות.
__נשים לב__: עבור הספקים עקרון הסופר-פוזיציה לא פועל.
נתבונן למשל על ההספק על הנגד R_2 :

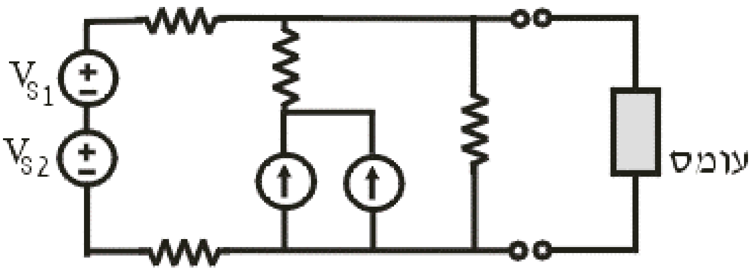
מהמעגל הראשון של השפעת מקור המתח נקבל: $P_v = \left(\frac{V}{R_1+R_2}\right)^2 R_2$

מהמעגל השני של השפעת מקור הזרם נקבל: $P_i = I^2\left(\frac{R_1}{R_1+R_2}\right)^2 R_2$

ורואים כי $P_i + P_v \neq P_T = \left(\frac{V}{R_1+R_2} + I\frac{R_1}{R_1+R_2}\right)^2 R_2$

כלומר עקרון הסופר-פוזיציה עובד בזרמים ומתחים אך __לא__ בהספקים.

הסבר לעקרון הסופר-פוזיציה:
נניח שהמערכת הנתונה
בדוגמה שלפנינו היא __ליניארית__.



כדי לטפל בענף מקורות המתח, מנתקים את מקורות הזרם.

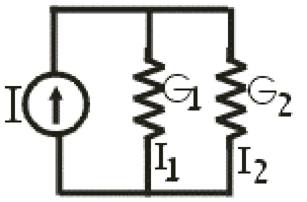
מוצאים את השפעת V_{s1} על העומס ואת השפעת V_{s2} , ומחברים. על העומס נקבל קשר מתח-זרם לינארי כלשהו שכן כל תגובה היא לינארית וחיבור תגובות לינאריות גם הוא לינארי.

כנ"ל לגבי מקורות הזרם בקיצור מקורות המתח. כלומר: עקרון הסופר פוזיציה הינו למעשה חיבור אופני התגובה הלינאריים כתוצאה מהמקורות השונים.

התגובה הכללית היא סופר-פוזיציה של כל ארבעת התגובות.

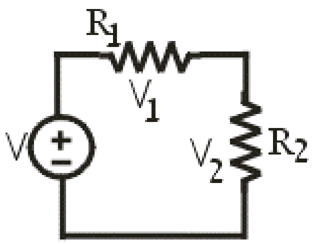
בנקודה זו נציין שתי שיטות נוספות שיעזרו לנו בפישוט מעגלים:

מחלק זרם:



$$I_1 = I \cdot \frac{G_1}{G_1 + G_2} = I \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

מחלק מתח:



$$V_1 = V \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$